

Modelleren: vertalen van werkelijkheid naar model – en terug

O. van Buuren

Universiteit van Amsterdam, Haags Montessori Lyceum

Modelleren: waarom?

Er zijn verschillende redenen om middelbare scholieren te leren modelleren, of om ze er op zijn minst mee in aanraking te brengen.

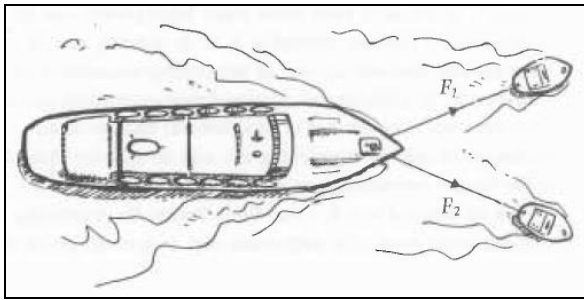
De eerste reden is dat modelleren een belangrijk onderdeel is van het werk van professionele onderzoekers en ontwerpers, niet alleen binnen de natuurwetenschappen, maar ook daarbuiten; denk bijvoorbeeld aan economie. Als leerlingen leren modelleren krijgen ze een beter beeld van zulk werk en worden ze er beter op voorbereid.

De tweede reden heeft betrekking op scientific literacy. Modellen, zoals bijvoorbeeld klimaat- en weermodellen, modellen van het CBS en ecologische modellen, hebben een grote invloed op onze samenleving. Elke burger zou daarom iets moeten begrijpen van de mogelijkheden en de beperkingen van modellen.

De derde reden betreft de inhoud van schoolvakken. In het huidige natuurkundeonderwijs wordt die inhoud sterk beperkt door de wiskundige mogelijkheden van de leerlingen. Hierdoor ligt de nadruk op een klein aantal speciale of sterk vereenvoudigde gevallen, en op momentane situaties. Er wordt vaak weinig aandacht besteed aan gemaakte aannames en de kwaliteit daarvan. Ook wordt er gemakkelijk voorbij gegaan aan het momentane karakter van sommige situaties. Een voorbeeld van een speciaal geval is de eenparig versnelde beweging vanuit rust. Hiervoor bestaat een eenvoudige analytische oplossing van de bewegingsvergelijkingen, gegeven door de bekende formules $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ en $s = v \cdot t$. Deze formules gelden echter alleen voor enkele bijzondere gevallen of ze gelden slechts bij benadering. In de schoolpraktijk wordt echter bijna elke val als vrij beschouwd en auto's remmen of versnellen steeds met een constante versnelling. Dat het hier gaat over modellen wordt zelden opgemerkt. Leerlingen gebruiken de formules te pas en te onpas. De bewegingsvergelijkingen zelf verdwijnen daarbij uit het zicht. In werkelijkheid vallen voorwerpen niet vrij en is de versnelling van een optrekkende of remmende auto niet constant. De discrepantie kan leerlingen die de werkelijkheid een beetje kennen in de war brengen.

Een voorbeeld van een momentane situatie is die van een schip dat getrokken wordt door twee sleepboten, zoals getekend in figuur 1. Leerlingen moeten de resulterende kracht van de sleepboten op het schip bepalen. Die resulterende kracht verandert echter tijdens de beweging, dus de te bepalen waarde is slechts momentaan. Als een leerling zich niet bewust is van dat momentane karakter, kunnen misverstanden ontstaan. Wie er op let, komt geregeld dubieuze,

onrealistische en zelfs onjuiste benaderingen van de werkelijkheid tegen in schoolboeken.



Figuur 1. In deze figuur moet de resulterende kracht op het schip worden bepaald. Het gaat hier echter alleen om een momentane waarde. Onder invloed van krachten en snelheden is de situatie immers voortdurend aan het veranderen. Dit wordt vaak genegeerd.

Dankzij de rekenkracht van de computer hebben leerlingen minder last van hun wiskundige rekenbependingen en neemt hun oplossingsrepertoire toe. Hierdoor komt vakinhoud binnen bereik die voorheen te moeilijk of qua rekenwerk te arbeidsintensief was. Er kunnen modellen worden gemaakt met een aanzienlijk hoger realiteitsgehalte en complete, dynamische processen, waarbij verschillende grootheden voortdurend van waarde veranderen, kunnen worden bestudeerd. De fundamentele vergelijkingen nemen in deze modellen de centrale plaats in die ze verdienen. Het geeft een kans om leerlingen meer zicht te laten ontwikkelen op het algemene karakter van die vergelijkingen. Daarnaast ligt het voor de hand dat er bij het modelleren op de computer bewust aandacht wordt besteed aan aannames en aan de kwaliteit van de modeluitkomsten. Dit zou overigens niet alleen bij computermodelleren zo moeten zijn. Bijna elk traditioneel sommetje kan immers beschouwd worden als modelleertaak. Maar om de een of andere reden besteden we weinig aandacht aan de gemaakte aannames of aan de betekenis van de uitkomst. We beschouwen bijvoorbeeld rekenfouten waardoor een leerling er een factor 1000 naast zit als kleine fouten. Opmerkelijk, als je dat plaatst tegenover het belang dat gehecht wordt aan significante cijfers op het centraal schriftelijk eindexamen.

Een volgende reden om te modelleren is dat het misschien nieuwe mogelijkheden biedt tot begripsontwikkeling; hiernaar moet nog onderzoek gedaan worden. Ten slotte zal het feit dat modelleren een serieus onderdeel van de nieuwe eindexamens is, voor docenten de meest overtuigende reden zijn om er aandacht aan te besteden.

Modelleren: wat?

Modelleren is veel meer dan alleen het bouwen en runnen van computermodellen. De examencommissie heeft het ongeveer als volgt geformuleerd:

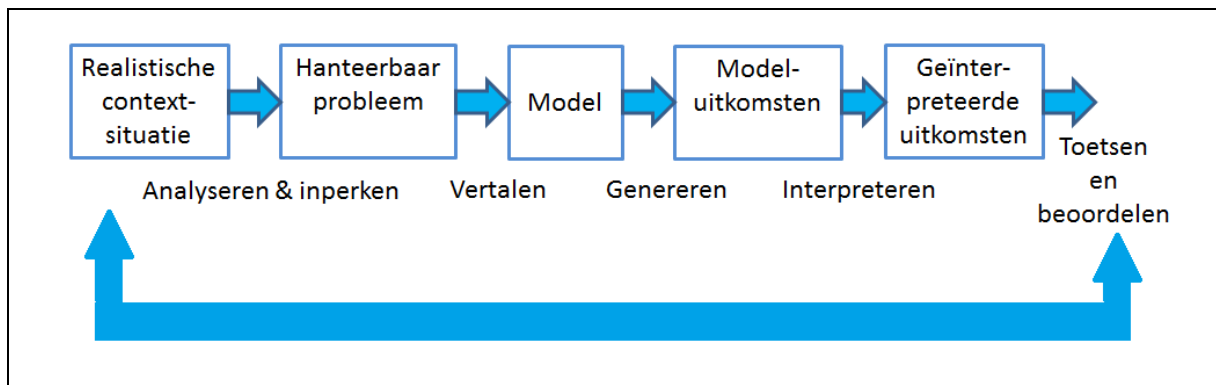
“De kandidaat moet een realistische contextsituatie kunnen analyseren en reduceren tot een hanteerbaar probleem, die kunnen vertalen in een model, modeluitkomsten genereren en het model kunnen toetsen en beoordelen.”

Dit ‘modelleerproces’ is samengevat in figuur 2. Modelleren vereist veel vaardigheden en kennis. We bespreken deze hieronder.

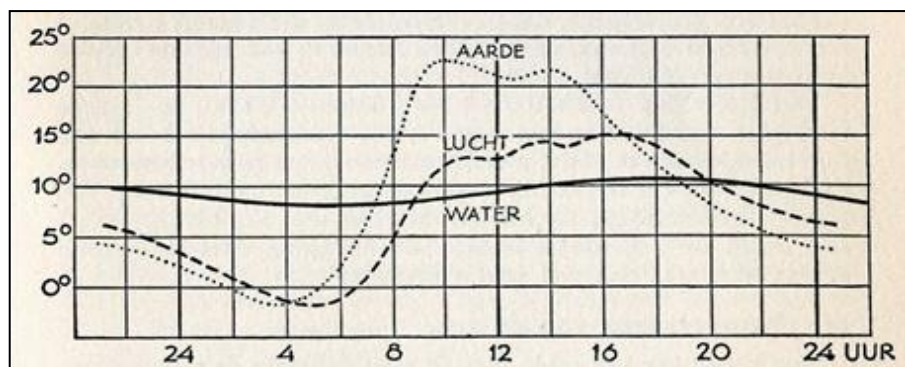
De realistische situatie

In de eerste plaats moet een leerling de realistische contextsituatie kennen, anders kan een leerling deze niet analyseren of toetsen en beoordelen. Uit onderzoek is herhaaldelijk gebleken dat leerlingen behoorlijk vast kunnen lopen door gebrek aan kennis van de realistische situatie. Een deel van hen heeft moeite met het leggen van een relatie tussen de modeluitkomsten en de werkelijke wereld. Leerlingen zijn vaak vooral gericht op het praktische resultaat van de opdracht en zijn geneigd om niet te reflecteren. Dit bleek ook in mijn eigen onder-

zoekspraktijk. Een enkel voorbeeld: leerlingen moesten met behulp van een model uitzoeken tot welke diepte gedurende een dag de warmte effectief doordringt in een vennetje op de hei. Een foto van die hei en de bijbehorende meetgegevens stonden in het boek (figuur 3). De leerlingen maakten in hun model een kleine fout met een factor 1000, waardoor ze uitkwamen op een effectieve diepte van 400 m. Dit werd echter snel door hen geaccepteerd: “sommige zeeën zijn wel dieper.” Het is kennelijk onvoldoende voor leerlingen als de realistische situatie alleen op papier aan hen wordt gepresenteerd. Verraderlijk is dat de fout van deze leerlingen niet direct aan hun grafiek te zien was. Als docent zie je zo’n fout daardoor gemakkelijk over het hoofd.

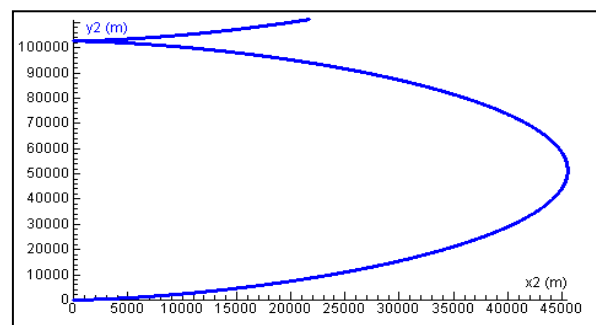


Figuur 2. Het modelleerproces. De onderste blauwe pijl geeft aan dat het model getoetst en beoordeeld wordt door de modeluitkomsten te vergelijken met metingen in de realistische contextsituatie die door het model beschreven wordt.



Figuur 3. Foto van de hei en meetgegevens van de temperatuur van het oppervlak van aarde, lucht en water bij een ven op die hei (gegevens van Minnaert). In de hoofden van sommige leerlingen veranderde het ven probleemloos in een diepzee.

Een ander voorbeeld: twee leerlingen wilden een zon-aarde model maken. Nadat ze de zon in de oorsprong van hun assenstelsel hadden gezet en de aarde een beginsnelheid hadden gegeven, bleek de zon langzaam weg te bewegen (figuur 4). Dit strookte niet met hun beeld van het zonnestelsel en er werd veel tijd besteed aan het zoeken naar de fout. Die werd niet gevonden, want het model is correct: bij de gegeven beginwaarden heeft het massamiddelpunt immers snelheid, dus het hele stelsel beweegt. De vereenvoudiging



Figuur 4. Baan van de zon in een zon-aarde model waarbij de zon geen, en de aarde wel een beginsnelheid heeft.

om te werken met een inertiaalsysteem waarin het massamiddelpunt stilstaat wordt gewoonlijk stilzwijgend gemaakt. Het computermodel geeft echter uitkomsten met een meer algemeen karakter, zonder dergelijke vereenvoudigingen. Dat kan verwarring scheppen. Het scheidt natuurlijk ook kansen om te leren.

In onze leerlijn hebben we modelleren systematisch gecombineerd met experimenteren. Door te experimenteren leren leerlingen de situatie kennen én verkrijgen ze data die nodig zijn om het model te toetsen.

Conceptuele basiskennis

Om de realistische situatie te kunnen analyseren en inperken moeten leerlingen kunnen kijken met een conceptuele blik. De basisbegrippen en basisrelaties moeten dus wel al bekend zijn. Uit onderzoek van Sylvia van Borkulo is gebleken dat modelleren niet erg effectief is als het gaat om het leren van basisbegrippen. Het heeft wel voordelen als het gaat om problemen met een grotere mate van complexiteit of een meer dynamisch karakter. Die basiskennis moet echter van te voren worden aangebracht.

Hanteerbaar probleem

Om de realistische situatie te kunnen vertalen naar een hanteerbaar probleem moet de leerling weten of het probleem hanteerbaar is. Bij open modelleeropdrachten kan dat moeilijkheden geven. Leerlingen kunnen immers de moeilijkheid van een probleem nog niet inschatten. Maar ook de docent moet hier wellicht ervaring in opbouwen.

Vertalen naar een model – de wiskunde

In het algemeen kun je stellen dat modelleren op de computer weliswaar minder rekenvaardigheid vereist, maar een hoger wiskundig abstractieniveau. Ik heb dit binnen mijn onderzoek meerdere malen geconstateerd.

In de eerste plaats bestaan dynamische modellen uit variabelen die door middel van formules aan elkaar gerelateerd zijn. Daarvoor moeten leerlingen wel weten wat een variabele en wat een formule is. Dat weten ze niet vanzelf. In een kleine modelleeropdracht in het begin van klas 3 havo-vwo moesten leerlingen een variabele definiëren door middel van een formule. Veel leerlingen bleken uitdrukkingen te gebruiken die uitsluitend uit cijfers bestonden. Uit nader onderzoek bleek dat op alle door ons onderzochte scholen de meerderheid van de leerlingen niet goed wist wat een formule eigenlijk was¹. De uitdrukking $a = 17^2$ werd bijvoorbeeld door een deel van hen een formule genoemd. Zulke leerlingen waren zelfs in de bovenbouw bij natuurkunde nog te vinden. Geen enkele van de door ons geanalyseerde schoolmethodes bleek een poging te doen om uit te leggen wat een formule is. Om te kunnen modelleren is begrip hiervan echter wel nodig.

In de tweede plaats zijn binnen de natuurkunde veel formules al bekend, maar vaak gesteld in een ideale, vereenvoudigde vorm. Om zo'n formule goed in een model op te kunnen nemen moet hij soms worden aangepast. Een voorbeeld is de formule voor veerkracht bij een trillend massa-veersysteem, $F_v = -C \cdot u$, waarbij $u = 0$ de evenwichtsstand is. Bij een massa die aan een veer hangt is de uitrekking van een veer in die evenwichtsstand echter niet 0, maar wordt bepaald door de massa en de veerconstante. Het wordt nog ingewikkelder als u ook gebruikt wordt om de positie van de massa aan te geven. In een model kan dat lang niet altijd. Leerlingen moeten hiermee leren omgaan en zullen soms formules moeten aanpassen of zelfs opstellen.

¹ Bij enkele klassen op één school ging dat iets beter. De docent van deze klassen eiste van zijn leerlingen dat ze bij een opgave eerst de formule en daarna de berekening moesten opschrijven.

In de derde plaats wordt de kern van dynamische modellen gevormd door differentiaal- of differentievergelijkingen. In de leerlijn is daarom van het begin af aan een Δ -notatie gebruikt. Deze meer formele aanpak is mij expliciet door mijn onderbouwleerlingen aangeraden. Ze vonden een switch van notatie van $s = v \cdot t$ naar $\Delta x = v \cdot \Delta t$ onnodig verwarrend. Hoewel veel leerlingen de Δ -notatie pas na enige maanden helemaal doorgronden, heb ik er geen nadelen van ondervonden: er werden in onze heterogene 2(M)HV-klas niet meer fouten gemaakt dan toen we met de oude notatie werkten.

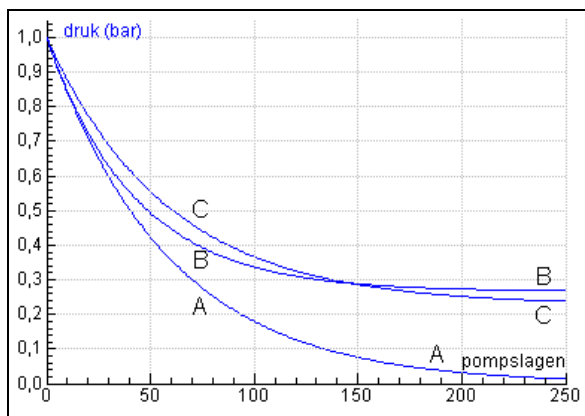
Het laatste punt is precisie in gebruik van plus- en mintekens. In een meer traditionele setting is die precisie meestal niet vereist, met wat inzicht kan er probleemloos een beetje gesjoemeld worden. Computermodellen zijn hierin echter onbarmhartig.

Vertalen naar een computermodel

Natuurlijk is ook kennis van het modelleergereedschap en van de software nodig. De modelleertaal moet geleerd worden. Hier komen we op terug bij de bespreking van grafisch modelleeren in Coach.

Uitkomsten interpreteren

Om de uitkomsten van modellen en experimenten te kunnen interpreteren is het belangrijk dat leerlingen grafieken kunnen lezen en analyseren. Dit moeten ze dus in een vroeg stadium leren. Dat betekent dat er relatief vroeg aandacht moet zijn voor zaken als snelheid, tijd-grafieken en raaklijnen. Omdat de processen meer dynamisch zijn, moet ook de vocabulaire vroeg worden uitgebreid. Figuur 5 is een voorbeeld van een grafiek aan het begin van klas 3 havo-vwo. Hier is sprake van ‘verminderde afnames’. Zonder geschikte vocabulaire kunnen leerlingen zo’n grafiek niet goed beschrijven.



Figuur 5. Opgave uit het begin van klas 3 havo-vwo. De grafieken beschrijven de druk in drie vacuümklokken die worden leeggepompt met een handpomp. Eén klok is lek, en in één klok worden de pompslagen niet geheel afgemaakt. Leerlingen moeten uitleggen welke klok lek is en bij welke klok de pompslagen niet worden afgemaakt. Het verwoorden van het antwoord vereist een adequate wiskundige vocabulaire.

Het model toetsen en beoordelen

Zonder terugkoppeling naar de werkelijkheid heeft de uitkomst van een model geen betekenis. In onze leerlijn koppelen we terug door de modeluitkomsten te vergelijken met de uitkomsten van experimenten. Bij leerlingen die iets verder gevorderd zijn, is het ook mogelijk om de modeluitkomsten te vergelijken met de uitkomsten van handmatige berekeningen voor vereenvoudigde situaties.

Investing in modelleren

Alles bij elkaar vereist modelleren dus erg veel kennis en vaardigheden. Het kost tijd en moeite om ze allemaal te leren. Om die reden hebben we onze leerlijn laten beginnen in klas 2(M)HV; dan is er meer tijd. De grote investering in tijd en moeite is nauwelijks rendabel als je modelleren beperkt tot een enkel onderwerp. Om te kunnen profiteren van de voordelen van modelleren moet het herhaaldelijk terugkomen in het curriculum en daarin goed geïntegreerd

zijn: je moet het niet alleen bij een enkel onderwerp doen, of het er even bovenop willen doen. Een goede opbouw rond modelleeropdrachten is zeer belangrijk. Als leerlingen een deel van de vereiste kennis en vaardigheden missen, wordt een modelleeropdracht al snel moeilijk en ontstaat er tijdverlies en frustratie. Ik heb dit zelf herhaaldelijk geconstateerd bij leerlingen die aan modelleeropdrachten begonnen zonder dat de voorbereidende stof voldoende was doorgenomen.

Hier staat tegenover dat het bij modelleren voor een groot deel om normale natuurkundige en wiskundige vaardigheden gaat, die toch al aan de orde moesten komen. Bovendien is modelleren in algemene zin niet nieuw: elk natuurkundesommetje is in feite een model. De combinatie van modelleren en natuurkunde vormt de kern van de natuurwetenschap. Er is een lang leertraject nodig, maar de winst is dat de schoolnatuurkunde meer realistisch kan worden en dat leerlingen die er eenmaal aan gewend zijn zich minder met rekendetails hoeven bezig te houden en zich op hoofdzaken en complete processen kunnen richten. Een vergelijkbaar voordeel zie je bij het gebruik van ICT bij het uitwerken van practica. Leerlingen hoeven niet meer eindeloos te rekenen met meetgegevens, maar kunnen dat door Coach of Excel laten doen. In één moeite door worden dan ook nog de grafieken gemaakt, die vervolgens met ICT ook nog snel geanalyseerd kunnen worden. Hierdoor zien gevorderde leerlingen sneller trends, hoofdzaken en verbanden dan zonder gebruik van ICT. Maar het gebruik van ICT moet wel geleerd worden en dat vereist een investering qua tijd.

Grafisch modelleren in Coach

Coach biedt de mogelijkheid om tekstueel én grafisch te modelleren. Tekstueel modelleren is de ‘klassieke’ manier. Het model bestaat hierbij uit beginwaarden en uit modelregels die iteratief doorlopen worden. In figuur 6 staat een stuk uit een tekstueel model voor een val met luchtweerstand. Het gebruikte integratie-algoritme is Runge-Kutta 4. Het voordeel van kleine tekstuele modellen, waarin Euler wordt gebruikt als integratie-algoritme, is dat ze vrij goed duidelijk maken wat er gebeurt. Een nadeel is dat bij een eenvoudige Euler-integratie al snel numerieke fouten optreden en Runge-Kutta voor een middelbare scholier te gecompliceerd is. De mogelijkheden van tekstueel modelleren op school zijn dan beperkt.

```

Modelvenster
'Deze berekening is gebaseerd op RK4
old_v := v
old_h := h
old_t := t

old_a := a
old_Fnetto := Fnetto
old_m := m
old_Fz := Fz
old_Fw := Fw
old_k := k
old_Stroom_1 := Stroom_1

k1_v := a*dt
k1_h := Stroom_1*dt

t := old_t + 0.5*dt
v := old_v + 0.5*k1_v
h := old_h + 0.5*k1_h
m := 0,00757
Fz := m*9,81
k := 0,0039/100
Stroom_1 := -v
Als v>0 Dan
  Fw := -k*v^2
Anders
  Fw := k*v^2
EindAls
Fnetto := Fz+Fw
a := Fnetto/m
k2_v := a*dt
k2_h := Stroom_1*dt

t := old_t + 0.5*dt
v := old_v + 0.5*k2_v
h := old_h + 0.5*k2_h

t := 0
dt := 0,01
v := 0,2 ' m/s
m := 0,00757 ' kg
Fz := m*9,81 ' N
k := 0,0039/100 ' kg/m
h := 0 ' m
Stroom_1 := -v ' m/s
Als v>0 Dan
  Fw := -k*v^2
Anders
  Fw := k*v^2
EindAls
Fnetto := Fz+Fw ' N
a := Fnetto/m ' m/s/s
  
```

Figuur 6. Deel van een tekstueel model voor een val met luchtweerstand. Rechts staan de beginwaarden, links de modelregels. Het gebruikte integratie-algoritme is Runge-Kutta 4.

Wij hebben gekozen voor grafisch modelleren. De bouwstenen van grafische modellen zijn in essentie differentievergelijkingen en directe relaties. In de onderbouw hebben we ze Δ -formules en directe formules genoemd, omdat een deel van de leerlingen anders denkt dat één van beide typen geen formule is.

Een differentievergelijking wordt in een grafisch model gerepresenteerd door middel van een ‘stock’-icoon (een rechthoek) die een voorraad- of toestandsvariabele voorstelt, en één of meer ‘flow’-iconen (een dikke pijl) die stroomvariabelen voorstellen. Zie de voorbeelden van figuur 7a t/m 7c. Als je in Coach een stock- en een flow-icoon neerzet, interpreteert Coach dat als de bijbehorende differentievergelijking; die hoeft dus nergens te worden ingetypt. Wel moet een beginwaarde worden gegeven aan de stock en moet(en) de flowvariabele(n) worden

gedefinieerd. Een nadeel hiervan is dat beginners kunnen denken dat er van een formule geen sprake is.

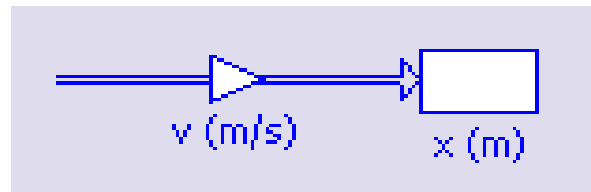
Grootheden die niet voorkomen in een differentievergelijking heten hulpvariabelen. Ze worden gerepresenteerd door cirkelvormige iconen. Zowel flow- als hulpvariabelen moeten worden gedefinieerd als constanten of door middel van directe relaties. Deze moeten wel worden ingetypt. De dunne relatiepijlen geven de aanwezigheid van variabelen in directe relaties aan. De directe relaties zelf zijn niet direct zichtbaar; er moet wat moeite worden gedaan om ze zichtbaar te maken.

Het model in figuur 8 is hetzelfde als het model in figuur 6, maar nu grafisch, met de bijbehorende formules in de toelichting.

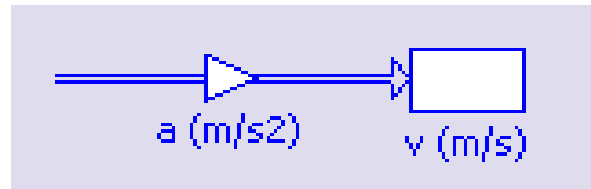
Grafisch modelleren heeft als nadeel dat de grafische taal geleerd moet worden. Voor beginners is het daarbij een nadeel dat belangrijke details, zoals de tijdstap Δt en de directe relaties, niet direct zichtbaar zijn in Coach 6. Het verschil tussen de twee soorten pijlen is voor beginners ook niet direct duidelijk.

Grafisch modelleren biedt echter ook belangrijke voordelen. De hoofdstructuur van een model is goed zichtbaar en redelijk intuïtief. Niet verwonderlijk, want de grafische modelleertaal is in de jaren 60 van de vorige eeuw ontwikkeld als middel om modellen beter uit te leggen aan mathematisch minder onderlegde mensen. Grafisch modelleren wordt dan ook internationaal zeer veel gebruikt in de sociaaleconomische hoek. Leerlingen kunnen grafische modellen al snel redelijk goed interpreteren. Hierin lijken grafische modellen op mind-maps. Maar hierin zijn ze ook verraderlijk: pas als leerlingen zelf modellen moeten bouwen of aanpassen blijkt of ze het echt begrijpen. Als in het leerproces onvoldoende aandacht is geweest voor het verband met de formules valt dat vaak tegen. Zie bijvoorbeeld het onderzoek van René Westra over modelleren bij biologie.

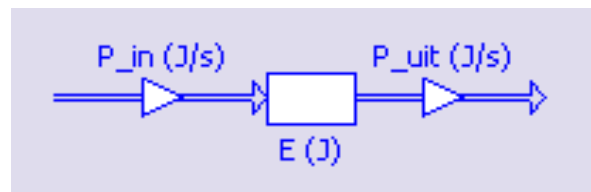
Een groot voordeel van grafisch modelleren is dat complexe integratie-algoritmen kunnen worden gebruikt door eenvoudig het gewenste algoritme aan te vinken; in het grafische diagram verandert er niets. Grafische modellen kunnen in Coach desgewenst worden omgezet in tekstuele modellen. Het omgekeerde is niet mogelijk. Een laatste voordeel is dat in Coach 6 met grafische modellen animaties kunnen worden aangestuurd.



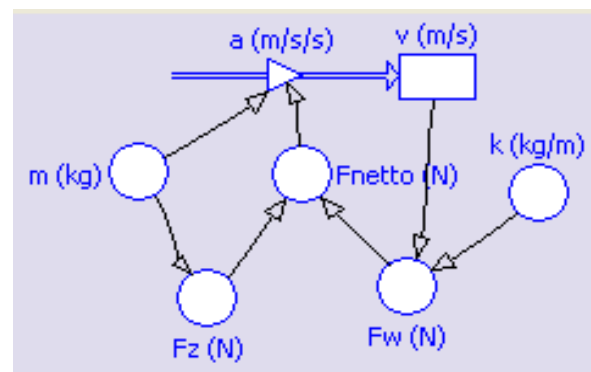
Figuur 7a. Grafische representatie van $\Delta x = v \cdot \Delta t$.



Figuur 7b. Grafische representatie van $\Delta v = a \cdot \Delta t$.



Figuur 7c. Grafische representatie van $\Delta E = (P_{in} - P_{uit}) \cdot \Delta t$.



Figuur 8. Grafisch model voor een val met luchtweerstand. Bij dit model horen de volgende formules: $\Delta x = v \cdot \Delta t$; $\Delta v = a \cdot \Delta t$; $a = F_{netto}/m$; $F_{netto} = F_z - F_w$; $F_w = k \cdot v^2$ en $F_z = m \cdot 9,81$. Aan het feit dat er alleen uitgaande relatiepijlen mee verbonden zijn, is te zien dat m en k constanten zijn.

Belangrijkste valkuilen

Een belangrijke valkuil bij modelleeronderwijs is die van de grote modelleeropdracht met daarin teveel en te sterk uiteenlopende leerdoelen. Hierin is er een duidelijke analogie met practicum. In 1994 al wezen Ed van den Berg en Jaap Buning er in NVOX 19 op dat het leerrendement van practicum laag is als het aantal leerdoelen van een practicumopdracht te groot en te divers is, en als het practicum onvoldoende is ingebed in de lessen. Om het rendement te verhogen moet er gericht onderscheid worden gemaakt tussen drie soorten practica: 1) het apparaatpracticum, 2) het onderzoeksvaardighedenpracticum, en 3) het begripspracticum. Ze raadden onder meer aan om apparaatvaardigheden en andere basisvaardigheden eerst apart te laten oefenen, met een begripsmatig eenvoudig onderwerp. Bij een apparaatpracticum kan een 'kookboek'-benadering volstaan. Een begripsmatig leerdoel vereist echter dat leerlingen kunnen kijken met een conceptuele blik. De leerlingen moeten weten waar ze op moeten letten. In zo'n geval moet de aandacht van de leerlingen vooraf worden gericht, bijvoorbeeld door vragen te stellen. Ook is nazorg nodig: er moet gereflecteerd worden. Bij modelleren komt daar nog bij dat leerlingen de realistische situatie moeten kennen. In het ontwerp van de leerlijn heb ik daarom gewerkt met modelleersequenties rond de modelleeractiviteiten waarin aan al deze aspecten aandacht wordt besteed. Een algemene modelleersequentie is afgebeeld in figuur 9. In deze sequentie is ook aandacht voor de verankering. Afwijkingen van deze sequentie zijn mogelijk. Bij iets verder gevorderde leerlingen kan bijvoorbeeld het model vooraf gaan aan het experiment. Het model zorgt dan voor een voorspelling. Zowel bij het experiment als bij de modelleeractiviteit moet er reflectie zijn na de opdracht, zodat leerlingen de stap van concreet naar abstract maken. In het algemeen kan een groot deel van het modelleren waarschijnlijk beter zonder apparatuur gedaan worden. Hierin lijkt modelleren op technische automatisering, waarbij leerlingen na een inleidende fase, waarin het systeem bord wordt gebruikt, moeten leren ontwerpen op papier. Als het ontwerp af is, kan het worden geïmplementeerd en getest.

Leersequentie rond een modelleeractiviteit

Basisbegrippen	Introductie basisbegrippen (na/wi) Formatieve test, verankering van de basisbegrippen
Experiment	Omgaan met apparatuur (aparte opdracht) Aandacht richten (vragen, voorspellingen) Experiment, metingen Reflectie op het eind van het experiment Reflectie na het experiment (zonder de opstelling)
Modelleeractiviteit	Introductie nieuwe begripsmatige aspecten van modelleren Aandacht richten Omgaan met modelleergereedschap (aparte opdracht) Modelleeractiviteit Testen en evalueren door vergelijking experiment en model Toepassen model op nieuwe situaties (aparte activiteit) Reflectie aan het eind van de modelleeractiviteit Reflectie na de modelleeractiviteit (zonder Coach)




Figuur 9. Algemene modelleersequentie rond een modelleeractiviteit.


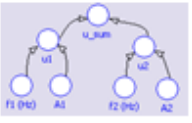

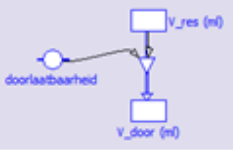
Als docent op een school met beperkte ICT-mogelijkheden is het verleidelijk om zoveel mogelijk leerdoelen in een modelleeropdracht te stoppen, of zoveel mogelijk computeractiviteiten in één les te stoppen, omdat je blij bent dat je voor je les eindelijk voldoende computers

hebt kunnen reserveren. Het is echter de vraag of je dan een voldoende leerrendement haalt.

De leerlijn

De door mij ontworpen leerlijn is volledig geïntegreerd in het onderbouwcurriculum voor natuurkunde van het Haags Montessori Lyceum. Dat was mogelijk omdat dat curriculum geheel door ons zelf geschreven is. In het curriculum is er niet alleen aandacht voor dynamische modellen, maar ook voor verschillende andere soorten modellen. Zo wordt er bij de optica in klas 2(M)HV bewust onderscheid gemaakt tussen echte lichtstralen en modellen van lichtstralen zoals die op papier worden getekend. Formules worden bij voorkeur niet geponereerd, maar zo mogelijk geconstrueerd. De onderwerpen die van belang zijn voor de leerlijn grafisch modelleren staan in figuur 10.

Klas	2MHV		
Domein	Kinematica		Energie
	Deel 1	Deel 2	
Typische inhoud	Modelgestuurde animatie	Schetsgestuurd model & animatie	Toevoer, opslag en afvoer van energie (stuwmeer, aardoppervlak)
Typisch model			
Doelen	Omgaan met Coach Δ-formule repertoire Interpretatie x,t-grafieken Interpretatie v,t-grafieken	Interpretatie x,t-grafieken Interpretatie v,t-grafieken (eerste variabele 'flow')	Voorraad-stroom schema's Verbreding oriëntatiebasis Δ-formule repertoire Interpretatie E,t-grafieken Interpretatie P,t-grafieken

Klas	3HV				
Domein	Weerstand en geleidingsvermogen	Moleculen	Trillingen	Dynamica	Duinproject
				Newton, Vallen	
Typische inhoud	Berekeningen U, I, R en G	Vacuumpomp	Trilling, (Zwevingen)	$\Delta v = \frac{F}{m} \cdot \Delta t$, Luchtweerstand	Doorlaatbaarheid zandfilter
Typisch model	Gebruik formule in Coach bij data-verwerking				
Doelen	Gebruik meerdere formules, Formulebegrip, Gebruik formule in Coach	Gebruik formule in model, Formule- en variabelebegrip, directe relatie	Netwerk van directe relaties, Afhankelijkheidspatronen	Completering oriëntatiebasis voor modelbouw, Bouwvolgorde, Interpretatie	Zelfstandig model ontwerpen en testen

Figuur 10. De leerlijn grafisch modelleren op hoofdpunten, zoals die is geïntegreerd in het curriculum.

In de loop van de leerlijn neemt de complexiteit van de modellen toe, evenals de mate waarin leerlingen zelfstandig modelleren. Bijzondere punten zijn de volgende.

- In het hoofdstuk energie en vermogen wordt aandacht besteed aan zowel transport als op-

slag van energie.

- Als voorbereiding op het gebruik van formules in modellen gebruiken leerlingen aan het begin van 3 havo-vwo formules in Coach bij het uitwerken van een elektriciteitspracticum.
- De module over de vacuümpomp gaat over de wetenschappelijke methode als combinatie van modelleren en experimenteren. Leerlingen passen hierin een bestaand model aan. Ook wordt uitgebreid ingegaan op mogelijke fouten bij experimenten en modellen.
- Bij de module over trillingen wordt de modelleeromgeving gebruikt om sinusvormige trillingen op te tellen. Hiermee worden zwevingen verklaard.
- Bij de kinematica komen raaklijnen al in klas 3 aan de orde.
- Bij de dynamica wordt niet alleen de vrije val behandeld, maar ook een val met luchtweerstand. In deze module komen alle basiselementen van grafisch modelleren voor het eerst samen.
- Het duinproject is een project waarbij biologie en natuurkunde werden gecombineerd. Het staat voor de volledigheid in het overzicht, maar is inmiddels uit de leerlijn verdwenen omdat het project verplaatst is naar eerder in het jaar. Het project is niet onmisbaar voor de leerlijn.

Resultaten

Aan het eind van klas 3 havo-vwo bleken veel leerlingen, in elk geval die leerlingen die kozen voor een natuurprofiel, grafische modellen te kunnen gebruiken en behoorlijk te kunnen interpreteren. Bovendien konden ze zelf eenvoudige grafische modellen, gebaseerd op twee of drie relaties, ontwerpen op basis van gegeven formules en konden ze eenvoudige directe relaties zelf opstellen. De tijdsinvestering voor leerlingen is moeilijk aan te geven, juist omdat de leerlijn zo sterk verweven is met het curriculum. Wel is duidelijk dat leren modelleren tijd kost. Aan sommige onderwerpen kwamen we minder toe dan voorheen. Daar staat tegenover dat verschillende andere onderwerpen meer uitgebreid en meer diepgaand aan de orde zijn gekomen, zoals hierboven is aangegeven. Op dit moment wordt het ontwerponderzoek uitgebreid met de eerste maanden van klas 4.

Onne van Buuren is docent natuurkunde aan het Haags Montessori Lyceum. In 2015 promoveerde hij aan de UvA bij Ton Ellermeijer op ontwerponderzoek naar modelleren in de onderbouw met het proefschrift *Development of a Modelling Learning Path*.